Agrégation d'informatique - Épreuve 3
Option "Fondements de l'informatique"
Sujet 0

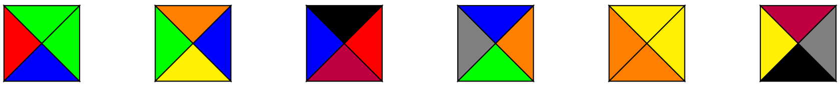
Le sujet se compose d'un problème et d'un exercice et comporte 8 pages.

1 Problème - Tuiles de Wang

1.1 Introduction

Ce problème étudie la notion de tuiles de Wang et ses liens avec la décidabilité, la complexité et la logique.

Une tuile de Wang est un carré dont les côtés sont de longueur 1 et colorés. L'exemple suivant présente six exemples de tuiles de Wang :

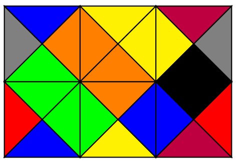


On considère alors la question du pavage du plan ou d'une partie du plan, comme un rectangle, avec un jeu de tuiles fini donné sachant

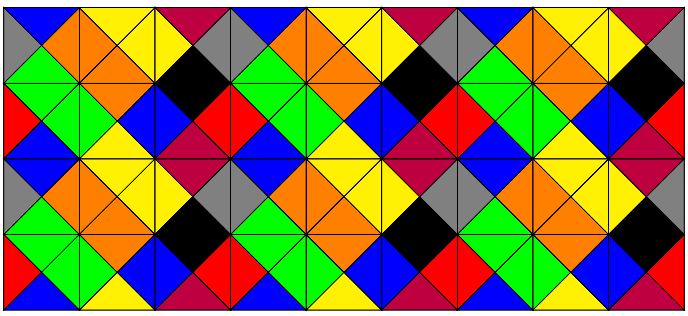
— qu'on peut les répéter autant de fois qu'on veut,
— sans les tourner,
— et sans chevauchement de deux tuiles, sauf pour les bords et, dans ce cas, en s'assurant que deux tuiles partageant un côté ont la même couleur pour celui-ci.

Tous les jeux de tuiles considérés sont supposés finis.

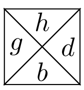
Ainsi, avec le jeu de six tuiles précédent, on a un pavage d'un rectangle de dimension 3×2 ainsi :



Ce pavage s'étend alors naturellement à un pavage du plan par répétition :

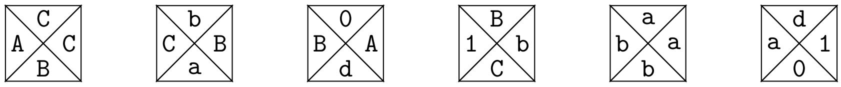


Afin de raisonner sur des jeux de tuiles, il est plus pratique de considérer des symboles à la place des couleurs. Ainsi, formellement, on considère un ensemble de symboles Σ et une tuile est un quadruplet $(g, b, d, h) \in \Sigma^4$ matérialisé par le carré :



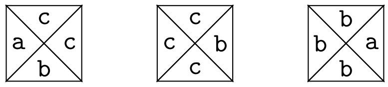
Si t est une tuile, on notera t_g son symbole à gauche, t_b son symbole en bas, t_d son symbole à droite et t_h son symbole en haut.

Le jeu de tuiles précédent pourrait ainsi être présenté à l'aide des symboles $\Sigma = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}, \mathtt{D}, \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ ainsi :



On omettra le plus souvent de préciser l'ensemble des symboles sachant qu'on peut directement le déduire depuis le jeu de tuiles considéré.

Question 1.1. Montrer qu'il n'est pas possible de paver le plan avec le jeu de tuiles suivant :



Il est possible de formaliser ces notions :

Définition 1. Soit S un jeu de tuiles de Wang.
Une application $T : \mathbb{Z}^2 \to S$ est un pavage du plan par S lorsque

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2, T(x,y)_d = T(x+1,y)_g \text{ et } T(x,y)_h = T(x,y+1)_b$$

De la même manière, on dit que $T : \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,m\} \to S$ est un pavage du rectangle de dimension $n \times m$ lorsque T vérifie également la condition précédente.

On dit qu'un pavage T est périodique lorsqu'il existe $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2, T(x,y) = T(x+a,y) = T(x,y+b) = T(x+a,y+b).$$

1.2 Théorème de Wang

Dans ce paragraphe on va démontrer un théorème dû à Wang et examiner des conséquences de celui-ci.

Théorème 1. *Si un jeu fini de tuiles de Wang peut paver tout carré de dimension $n \times n$ où $n \in \mathbb{N}$ alors il peut paver le plan tout entier.*

On remarque que pouvoir paver un carré ne signifie pas que les bords de ce carré puisse se recoller pour permettre d'en déduire un pavage périodique comme dans l'exemple de l'introduction.

Question 1.2. Montrer que dans tout arbre ayant une infinité de noeuds et dans lequel chaque noeud a un nombre fini de fils, il existe un chemin de longueur infinie partant de la racine et descendant le long des arêtes de l'arbre.

Question 1.3. On considère un jeu fini de tuiles de Wang permettant de paver un carré de dimension $2n \times 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On peut construire un arbre dont les noeuds sont les pavages de ces carrés et où le noeud x correspondant à un pavage de $2n \times 2n$ a pour fils les pavages de dimension $(2n+2) \times (2n+2)$ qui contiennent x en leur centre.

1. Montrer qu'on obtient bien un arbre ainsi et qu'il satisfait les hypothèse de la question 1.2.
2. En déduire une preuve du théorème 1.

Question 1.4. Montrer que la propriété énoncée dans le théorème 1 est fausse si on suppose que le jeu de tuiles est infini.

On examine maintenant des conséquences du théorème 1.

Question 1.5. Montrer que si un jeu fini S de tuiles de Wang pave le quart supérieur droit du plan, alors il pave le plan tout entier.

Question 1.6. On considère un jeu fini S de tuiles de Wang qui pave le plan et qui est minimal pour cela, c'est-à-dire qu'il ne pave plus le plan si on lui une retire une de ses tuiles. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que toute tuile de S apparaisse dans tout carré de dimension $n \times n$ d'un pavage du plan par S.

La question suivante permet d'affirmer que si on peut paver le plan, alors on peut le faire de manière *presque* périodique dans un sens intuitif de répétition de motifs.

Définition 2. Un pavage T est *presque périodique* si tout motif carré de T s'y répète infiniment.

On souhaite prouver la proposition suivante :

Étant donné un jeu fini S de tuiles de Wang qui pave le plan, il existe un pavage pseudo-périodique du plan par S.

Question 1.7. On considère pour cela un jeu fini S de tuiles de Wang qui pave le plan et un pavage T_0. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note M_n l'ensemble des motifs de dimension $n \times n$ présents infiniment souvent dans le pavage T_0.

1. Montrer que tous les M_n sont non vides et contiennent exclusivement des sous-motifs présents dans $\bigcup_{1 \leq p < n} M_p$.
2. En déduire l'existence d'un pavage T_1 dans lequel tous les motifs carrés appartiennent à $\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} M_p$.

On poursuit donc la construction précédente pour déduire un pavage T_2 dont les motifs sont contenus infiniment souvent dans T_1, puis des pavages $T_3, T_4, \ldots$

3. Montrer que la suite de pavages (T_n) est stationnaire, autrement dit qu'il existe un rang n_0 et un pavage T_∞ tel que
$$\forall\, n \geq n_0,\, T_n = T_\infty$$
4. Montrer que le pavage T_∞ est presque périodique.

1.3 Théorie et pavage

Étant donné un jeu de tuiles, on va construire dans cette partie une théorie dont les modèles seront les pavages.

1.3.1 Théorie des grilles

Dans un premier temps, on va déterminer une théorie des grilles.

On considère le symbole d'égalité et quatre symboles de fonctions unaires g, d, b, h (pour *gauche, droite, bas, haut*) et la théorie G_0 contenant les axiomes suivants :

$$\begin{aligned}
&\forall\, x, && x = x && (1)\\
&\forall\, x, y, && x = y \implies y = x && (2)\\
&\forall\, x, y, z, && (x = y \wedge y = z) \implies x = z && (3)\\
&\forall\, x, y, && x = y \implies (g(x) = g(y) \wedge d(x) = d(y) \wedge b(x) = b(y) \wedge h(x) = h(y)) && (4)\\
&\forall\, x, && g(d(x)) = x && (5)\\
&\forall\, x, && d(g(x)) = x && (6)\\
&\forall\, x, && b(h(x)) = x && (7)\\
&\forall\, x, && h(b(x)) = x && (8)\\
&\forall\, x, && g(h(x)) = h(g(x)) && (9)\\
&\forall\, x, && g(b(x)) = b(g(x)) && (10)\\
&\forall\, x, && d(h(x)) = h(d(x)) && (11)\\
&\forall\, x, && d(b(x)) = b(d(x)) && (12)
\end{aligned}$$

Les quatre premiers axiomes sont ceux de la théorie de l'égalité, les autres expriment le fait que $d(x)$ est la case voisine de x à droite, $h(x)$ la case voisine de x en haut, etc.

Question 1.8. Montrer que les ensembles suivants sont des modèles de T_0 :

1. $\mathbb{Z}^2$
2. $\forall (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$
3. $\forall n \in N^*, \{1, \ldots, n\} \times \mathbb{Z}$

Si $\mathbb{Z}^2$ correspond effectivement à une grille planaire infinie, les deux autres modèles correspondent respectivement à une grille torique et à une grille cylindrique.

Question 1.9. Déterminer une théorie T_1, extension de T_0, permettant d'avoir des grilles nécessairement planaires infinies. T_1 peut-elle être finie ?

On dit que M est un modèle connexe de T_1 lorsque pour tout $x, y \in M$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $f_1, \ldots, f_n \in \{g, b, d, h\}$ tels que $x = f_1(\cdots f_n(y) \cdots)$. Ici, on a noté par simplification de la même manière le symbole g et la fonction qui lui est associée dans le modèle M.

Question 1.10. Déterminer un modèle non connexe de T_1.

On admet ici le théorème suivant, dit théorème de compacité :

Théorème 2. *Soit T une théorie, T est cohérente si et seulement toute partie finie de T est cohérente.*

Question 1.11. À l'aide de ce théorème, montrer que toute extension de T_0 qui possède le plan $\mathbb{Z}^2$ comme modèle possède un modèle non-connexe.

1.3.2 Théorie associée à un jeu de tuiles

On considère ici un jeu fini de tuiles S dont les symboles/couleurs sont les entiers de $C = \{1, \ldots, c\}$, ce qu'il est toujours possible de faire quitte à fixer une énumération des symboles. On a donc $S \subset C^4$ vu qu'on code une tuile comme un quadruplet (g, b, d, h).

On conserve les quatre symboles unaires vus précédemment et pour chaque entier $i \in \{1, \ldots, c\}$, on considère deux symboles de relations unaires D_i et H_i auquel on veut donner le sens suivant pour un case x de la grille :

— $D_i(x)$ si et seulement la tuile sur la case x a son côté droit avec le symbole i ;

— $H_i(x)$ si et seulement la tuile sur la case x a son côté haut avec le symbole i.

Question 1.12. Écrire une théorie T_S étendant T_1 exprimant le fait que chaque case a ses côtés colorés avec un unique élément de C, et que le quadruplet des couleurs correspond à une tuile de S.

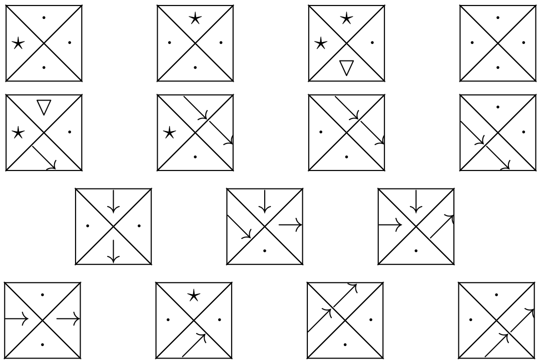
Question 1.13. Montrer que T_S est cohérente si et seulement si S pave le plan.

Question 1.14. Montrer que T_S possède un modèle fini si et seulement si S peut paver le plan de façon périodique.

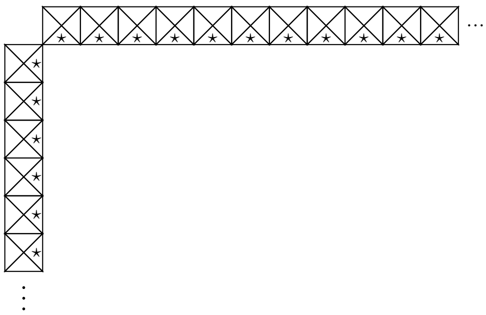
1.4 Calculer avec un jeu de tuiles

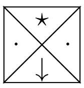
Il est possible de réaliser des calculs à l'aide d'un jeu de tuiles en partant d'une disposition de tuiles et en la complétant en un pavage du plan ou d'une partie du plan.

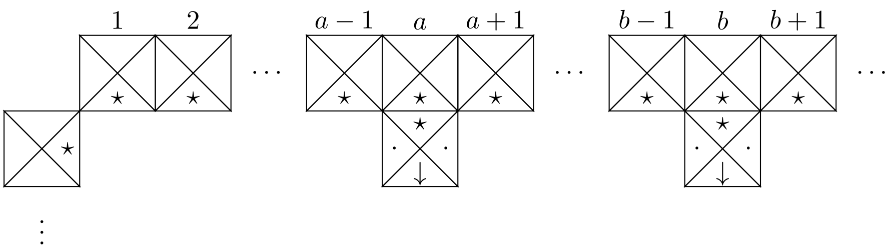
On va considérer ici le jeu de tuiles :

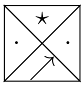


On s'intéresse à la question du pavage du quart de plan inférieur droit étant donné une condition de bord qui est d'avoir le symbole $\star$ partout. Cela revient en fait à considérer que d'autres tuiles sont placées de telle sorte qu'on ait l'arrangement suivant.



Question 1.15. Soit a et b deux entiers tels que $2 \leq a < b$. Montrer qu'il existe un unique pavage du quart de plan complétant le motif suivant obtenu en plaçant deux tuiles  à des distances a et b du bord gauche :



Montrer qu'il contient une unique tuile  et qu'elle est situé sur la première ligne sous le bord supérieur et à distance $a + b$ du bord gauche.

1.5 NP-complétude du pavage d'un rectangle

On s'intéresse ici au problème de décision :

> PAVAGE-RECTANGLE
> **ENTRÉE** Un jeu fini S de tuiles de Wang et un couple $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$
> **SORTIE** Est-ce qu'il existe un pavage d'un rectangle de dimension $n \times m$ par S ?

Dans cette partie, lorsqu'on demande un algorithme, il est possible de l'exprimer dans un pseudolangage.

Question 1.16. Donner un algorithme déterministe pour résoudre PAVAGE-RECTANGLE à l'aide du retour sur trace (*backtracking*).

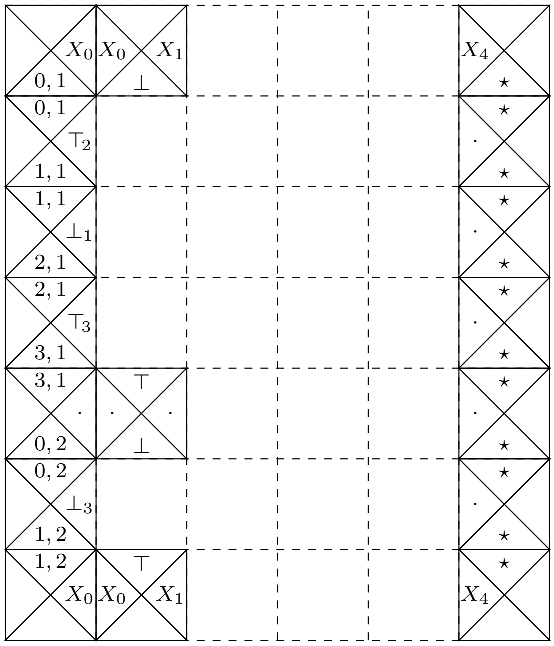
Question 1.17. En déduire un algorithme non déterministe, puis que PAVAGE-RECTANGLE est dans NP.

Question 1.18. Montrer que PAVAGE-RECTANGLE est dans NP à l'aide d'une autre définition de NP.

On va montrer que PAVAGE-RECTANGLE est NP-complet. Pour cela, on va réduire 3-SAT à ce problème.

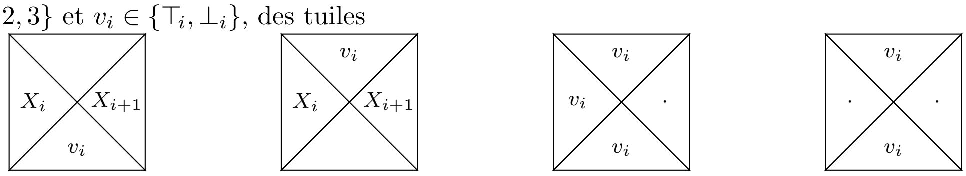
Question 1.19. La formule propositionnelle $(x_2 \vee \neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_3)$ est-elle satisfiable ?

Question 1.20. Compléter le rectangle suivant

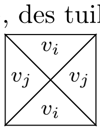


avec le jeu de tuiles composé

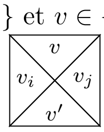
— pour $i \in \{1,2,3\}$ et $v_i \in \{\top_i, \perp_i\}$, des tuiles



— pour $i, j \in \{1,2,3\}$, $v_i \in \{\top_i, \perp_i\}$ et $v_j \in \{\top_j, \perp_j\}$, des tuiles



— et pour $i, j \in \{1,2,3\}$, $v_i \in \{\top_i, \perp_i\}$, $v_j \in \{\top_j, \perp_j\}$ et $v \in \{\top, \perp\}$ des tuiles



où v' est la valeur de vérité de la disjonction $v \vee (v_i = v_j)$.

Attention, dans la deuxième colonne, les couleurs du haut et du bas qui apparaîssent sont bien des symboles $\top$ et $\perp$ sans indices.

Question 1.21. En reliant les réponses aux deux questions précédentes, en déduire une preuve que le problème PAVAGE-RECTANGLE est NP-complet.

1.6 Indécidabilité du pavage par un jeu de tuiles

On considère le problème de décision suivant :

PAVAGE-PLAN
ENTRÉE un jeu fini S de tuiles de Wang et $t \in S$.
SORTIE est-ce qu'il existe un pavage du plan par S ?

Question 1.22. A l'aide du problème PAVAGE-RECTANGLE, montrer que le complémentaire de PAVAGE-PLAN est semi-décidable, c'est-à-dire qu'il existe un algorithme répondant en temps fini avec une réponse négative quand le jeu de tuiles ne pave pas le plan.

On considère maintenant le

PAVAGE-PLAN-PÉRIODIQUE
ENTRÉE un jeu fini S de tuiles de Wang et $t \in S$.
SORTIE est-ce qu'il existe un pavage périodique du plan par S ?

Question 1.23. A l'aide du problème PAVAGE-RECTANGLE, montrer que PAVAGE-PLAN-PÉRIODIQUE est semi-décidable, c'est-à-dire qu'il existe un algorithme répondant en temps fini avec une réponse positive quand le jeu de tuiles pave le plan de manière périodique.

On va voir que le problème PAVAGE-PLAN est indécidable.

Pour cela, on va encoder une machine de Turing avec un jeu de tuiles et montrer que l'assemblage de tuiles simule l'exécution.

On considère ici une machine de Turing déterministe à un ruban bi-infini $M = (\Gamma, Q, q_i, q_a, q_r, \delta)$ où Γ est l'alphabet, Q est l'ensemble des états, q_i est l'état initial, q_a est l'état d'acceptation, q_r l'état de refus et δ est la fonction de transition. On suppose que $q_i \notin \{q_a, q_r\}$ et donc que l'état initial n'est pas directement terminant. On rappelle que l'exécution d'une telle machine soit termine sur q_a ou q_r, soit continue indéfiniment.

Question 1.24. Montrer qu'il est indécidable de savoir si une telle machine de Turing accepte le mot vide.

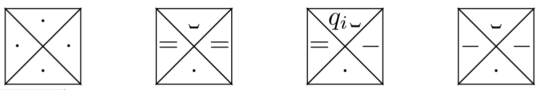
On considère des tuiles dont les couleurs sont dans l'ensemble

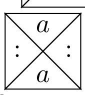
$$C = \{\cdot, =, -, :\} \cup \Gamma \cup Q \cup (Q \times \Gamma)$$

On note $\smile$ le symbole de blanc et pour $(q, s) \in C$, on notera qs le couple pour plus de lisibilité.

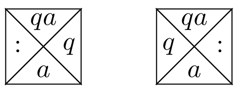
On définit le jeu de tuiles $S(M)$ composé

— des quatre tuiles suivantes :

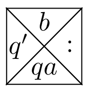


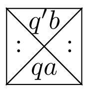
— pour chaque $a \in \Gamma$, une tuile 

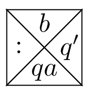
— pour chaque couple $(q, a) \in Q \times \Gamma$, on rajoute deux tuiles

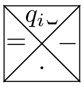


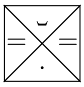
— pour chaque couple $(q, a) \in Q \times \Gamma$ si $\delta(q, a) = (q', b, dir)$ avec $q' \in Q \backslash \{q_a, q_r\}, b \in \Gamma$ on considère

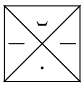
— si $dir = \leftarrow$, c'est-à-dire que la tête de lecture se déplace à gauche, la tuile 

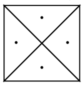
— si $dir = |$, c'est-à-dire que la tête de lecture reste sur place, la tuile 

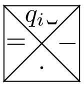
— si $dir = \rightarrow$, c'est-à-dire que la tête de lecture se déplace à droite, la tuile 

Question 1.25. On suppose qu'une tuile  est à la position $(0,0)$ de $\mathbb{Z}^2$. Montrer que dans tout pavage du plan par $S(M)$:

— il n'y a que des tuiles  à sa gauche

— il n'y a que des tuiles  à sa droite

— et que des tuiles  dans toutes les lignes plus bas.

Question 1.26. On suppose qu'une tuile  est à la position $(0,0)$ de $\mathbb{Z}^2$ dans un pavage du plan par $S(M)$. Décrire la ligne au dessus.

Question 1.27. Montrer que le problème suivant est indécidable :

> Pavage-Plan-Pointé
> **ENTRÉE** un jeu fini S de tuiles de Wang et $t \in S$.
> **SORTIE** est-ce qu'il existe un pavage du plan par S contenant la tuile t en position $(0,0)$?

On admet que le problème Pavage-Plan *reste indécidable sans supposer qu'une tuile spécifique est en* $(0,0)$.

Question 1.28. Déduire des questions 1.22, 1.23, 1.27 et du théorème 1 qu'un pavage du plan par un jeu fini de tuiles de Wang n'est pas nécessairement périodique.

2 Exercice - Combinateurs

On considère un ensemble $V = \{x, y, ...\}$ de variables et on définit un ensemble T de termes ainsi
— il existe un terme notée aussi x pour toute variable $x \in V$
— $\mathbf{S}, \mathbf{K}, \mathbf{I}$ sont des termes dits atomiques
— si t et t' sont des termes, alors (tt') est un terme, appelé une application
On munit T d'une réduction $\rightarrow$ induite par la relation suivante $\rightarrow_0$:

$$\begin{aligned} \forall x \in T, (\mathbf{I}x) &\rightarrow_0 x \\ \forall x, y \in T, ((\mathbf{K}x)y) &\rightarrow_0 x \\ \forall x, y, z \in T, (((\mathbf{S}x)y)z) &\rightarrow_0 ((xz)(yz)) \end{aligned}$$

ainsi :

$$\forall t, t' \in T, t \rightarrow_0 t' \Rightarrow \begin{cases} t \rightarrow t' \\ \forall s \in T, (st) \rightarrow (st') \\ \forall s \in T, (ts) \rightarrow (t's) \end{cases}$$

On admet que la relation $\rightarrow$ est confluente. On note $\rightarrow^*$ la clôture transitive de $\rightarrow$:

$$t \rightarrow^* t' \iff \exists n \in \mathbb{N}, \exists t_1, ..., t_n \in T, t \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow ... \rightarrow t_n \rightarrow t'$$

On dit que t est sous forme normale si il n'existe pas t' tel que $t \rightarrow t'$. Quand $t \rightarrow^* t_0$ où t_0 est sous forme normale, on dit que t_0 est une forme normale de t.

Question 2.1. Montrer que la forme normale d'un terme n'existe pas nécessairement mais que si elle existe, alors elle est unique. *Indication : on pourra considérer le terme* $(((SI)I)((SI)I))$.

Question 2.2. On pose $\mathbf{B} = ((\mathbf{S}(\mathbf{KS}))\mathbf{K})$. Montrer que $(((\mathbf{B}x)y)z)$ admet une forme normale et la calculer.

Question 2.3. Montrer que pour tout terme t, on a $(((\mathbf{SK})\mathbf{K})t) \rightarrow^* t$.
Que peut-on en déduire vis-à-vis du terme atomique $\mathbf{I}$?

On considère ici la β-réduction du λ-calcul notée $\rightarrow_\beta$ et sa clôture transitive $\rightarrow_\beta^*$. On note Λ l'ensemble des λ-termes.

Question 2.4. Montrer qu'il est possible de définir une application injective $\Phi : T \to \Lambda$ telle que

$$\forall t, t' \in T, t \to t' \Rightarrow \Phi(t) \to_\beta^* \Phi(t')$$

Indication : On peut définir Φ par induction et on peut poser, par exemple, $\Phi(\mathbf{K}) = \lambda x.\lambda y.x$.

Si $t \in T$, on note $V(t)$ les variables de t.
On définit par induction structurelle l'application $\Psi_x : T \to T$ ainsi :
— si $x \notin V(t), \Psi_x(t) = (\mathbf{K}t)$
— $\Psi_x(x) = \mathbf{I}$
— si $x \notin V(t), \Psi_x(tx) = t$
— si aucun des cas précédents ne s'applique $\Psi_x(uv) = ((\mathbf{S}\Psi_x(u))\Psi_x(v))$

Question 2.5. On pose $t = (x(Sy))$. Calculer $\Psi_x(t)$ puis la forme normale de $(\Psi_x(t)x)$. Mêmes questions pour $t = (((yx)x)z)$.

Question 2.6. Montrer que pour tout $t \in T$, $x \notin V(\Psi_x(t))$ et $(\Psi_x(t)x) \to^* t$.

Ainsi $\Psi_x(t)$ se comporte comme une abstraction $\lambda x.s$ dans le λ-calcul.
Si $t \in T$ et $x_1, \dots, x_n \in V$, on pose $\Psi_{x_1,x_2}(t) = \Psi_{x_1}(\Psi_{x_2}(t))$. De même, on pose $\Psi_{x_1,\dots,x_n}(t) = \Psi_{x_1}(\Psi_{x_2}(\dots(\Psi_{x_n}(t))\dots))$.

Question 2.7. Calculer $\Psi_{x,y}(x)$ et $\Psi_{x,y,z}((xz)(yz))$. Que retrouve-t-on par rapport à Φ ?